CP n° 3 - Applications

1 Généralités

Définition. *Une **application** (ou fonction) f est définie par :*

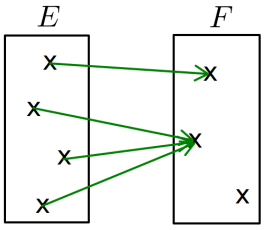
- *deux ensembles E et F, le premier étant appelé **ensemble de départ** (ou ensemble de définition), et le second **ensemble d'arrivée** ;*
- *la donnée, pour chaque élément $a \in E$, d'un unique élément de F, noté $f(a)$, appelé **image de a par f**.*

On dit alors que f est une application de E dans F, et on note :

$$\boxed{f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ a & \longmapsto & f(a) \end{array}}$$

Vocabulaire. *Soit f une application $E \to F$ et $y \in F$ un élément de l'ensemble d'arrivée. Lorsqu'il existe un $x \in E$ tel que $f(x) = y$, on dit que x est **un antécédent** de y par f.*

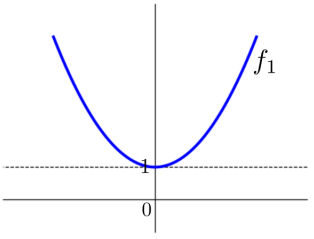
Rq : un élément de F peut avoir un antécédent, ou plusieurs, ou même aucun.



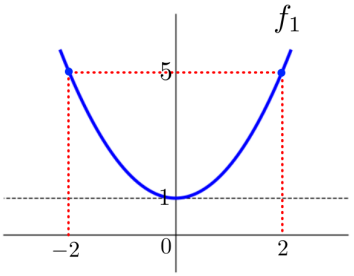
Attention : "un antécédent" tout court, ça ne veut rien dire. On est toujours un antécédent *de quelqu'un.*

Exemples :

► $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^2+1 \end{array}$

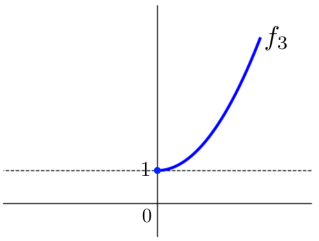


- 5 a deux antécédents, qui sont -2 et 2 (on peut s'en assurer en résolvant l'équation $t^2+1=5$, d'inconnue $t \in \mathbb{R}$) ;
- 1 a un seul antécédent, qui est 0 ;
- 0 n'a aucun antécédent, car pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t^2+1 \geqslant 1 > 0$, donc $t^2+1 \neq 0$.

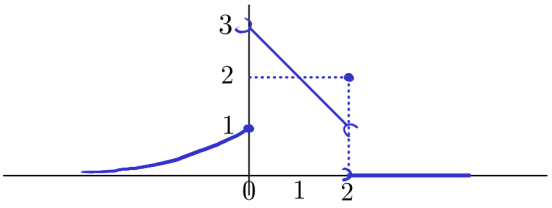


► $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [\mathbf{1}, +\infty[\\ t & \longmapsto & t^2+1 \end{array}$, qui est bien définie, car $\forall t \in \mathbb{R}$, $t^2+1 \geqslant 1$.

▶ $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [1,+\infty[\\ t & \longmapsto & t^2+1 \end{array}$



▶ $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} e^t & \text{si } t \leqslant 0 \\ 3-t & \text{si } t \in]0,2[\\ 2 & \text{si } t = 2 \\ 0 & \text{si } t > 2 \end{cases} \end{array}$



▶ $f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [\![0,9]\!] \\ t & \longmapsto & \text{le chiffre des unités de } t \end{array}$

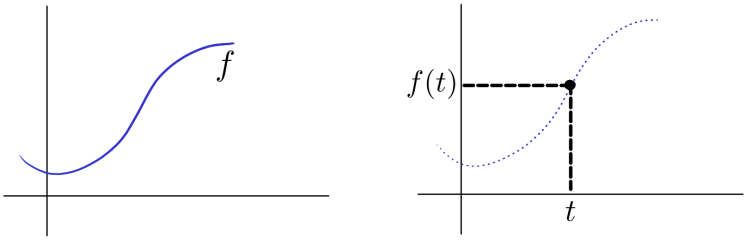
Par exemple, $f_5(2748,126) = 8$.

Remarques :

1. Dans une notation du type $f : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & e^t + t^2 \end{array} \right)$, la variable t est "muette" (ou "locale") :
   - elle est quantifiée par l'ensemble au dessus d'elle ;
   - elle peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre :

$$f = \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & e^t + t^2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & e^s + s^2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & e^a + a^2 \end{array} \right)$$

   - elle n'a de sens qu'à l'intérieur de cette notation, et est complètement indépendante de tout ce qui se trouve à l'extérieur (y compris éventuellement d'autres variables notées t) ;
   - on peut parfois n'écrire que $(t \mapsto e^t + t^2)$ pour parler de la fonction. Ex : "$(s \mapsto \sqrt{s})$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$".
2. **Remarque fondamentale "f ≠ f(x)" :**
   Il faut bien faire la part des choses entre d'une part une **fonction** f, et le **nombre** $f(t)$ qui n'est l'image par f que d'un seul élément (l'élément t qui a donc été quantifié quelque part si on en parle).



Il convient donc de se poser systématiquement la question de si on est en train de parler de nombres, ou d'une fonction. Exemples :

$\forall t \in [0,1]\,,\ f(t) \geqslant 0 \quad \longrightarrow \quad \underline{\text{ok}}$

f est positive sur $[0,1] \quad \longrightarrow \quad \underline{\text{ok}}$ (même signification que la précédente)

~~$f(t)$ est croissante sur $[0,1]$~~ $\quad \longrightarrow \quad f$ est croissante sur $[0,1]$

~~$\forall t \in [0,1]$, $f(t)$ est croissante~~ $\quad \longrightarrow \quad f$ est croissante sur $[0,1]$

~~$\forall t \in [0,1]$, $e^t + t^2$ est croissante~~ $\quad \longrightarrow \quad (t \mapsto e^t + t^2)$ est croissante sur $[0,1]$

~~$f(t)$ est continue/dérivable pour tout $t \in [0,1]$~~ $\quad \longrightarrow \quad f$ est continue/dérivable sur $[0,1]$

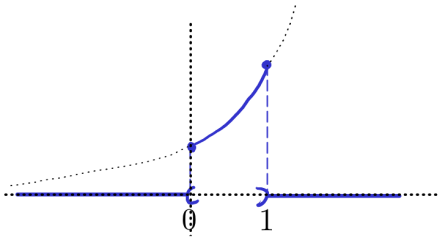
Notation. *L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E,F)$, ou F^E.*

Notation. *Une application $a : E \to F$ peut aussi être vue comme une* ***famille d'éléments de*** **F** ***indexée par*** **E** *: $(a_i)_{i\in E}$. De cette manière, pour tout $i \in E$, l'élément $a(i)$ est plutôt noté a_i.*
Cette notation rejoint en quelque sorte celle des n-uplets : $(x_1, \dots, x_n) = (x_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$. On l'adopte généralement dans le cas des suites, en notant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ plutôt que $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Définition (Fonction indicatrice)**.** *Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle* ***fonction indicatrice de*** **A***, et on note $\mathbf{1}_A$ la fonction de E dans $\{0,1\}$ définie par :*

$$\forall x \in E\,,\ \mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & si\ x \notin A \end{cases}$$

Exemple : la fonction $(x \mapsto e^x\, \mathbf{1}_{[0,1]}(x))$, définie sur $\mathbb{R}$, a le graphe suivant :



Définition (Restriction)**.** *Soit $f : E \to F$ et A une partie de E. On appelle* ***restriction de*** **f** ***à*** **A***, et on note $f_{|A}$ l'application :*

$$f_{|A} : \begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Il s'agit donc de restreindre l'ensemble de départ.

Exemple : la fonction f_3 était la restriction de f_2 à $\mathbb{R}_+$: $f_3 = f_{2|\mathbb{R}_+}$.

Définition (Composition)**.** *Soit E, F et G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G.*

$$E \underset{f}{\longrightarrow} F \underset{g}{\longrightarrow} G$$

On appelle ***composée de*** **f** ***par*** **g***, et on note $g \circ f$ l'application de E dans G définie par :*

$$\forall x \in E\,,\ g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$$

Rq : ce n'est pas parce que $g \circ f$ est bien définie que $f \circ g$ l'est. Et même dans les cas où $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bien définies, ces deux fonctions n'ont en général rien à voir l'une avec l'autre. Par exemple, si f et g sont les deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$$f : t \mapsto e^t \qquad\qquad g : t \mapsto 2t^2 + 3t + 1$$

alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(g(t)) = e^{2t^2+3t+1} \qquad \text{et} \qquad g(f(t)) = 2(e^t)^2 + 3e^t + 1$$

Définition (Application identité)**.** *Soit E un ensemble. On appelle* ***application identité de*** **E***, et on note Id_E l'application :*

$$Id_E : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

Rq : pour toute fonction $f \in \mathcal{F}(E, E)$, on a :

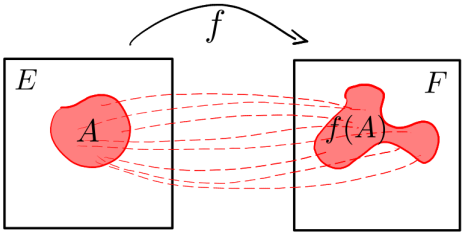
$$f \circ \mathrm{Id}_E = f \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Id}_E \circ f = f$$

Autrement dit, Id_E peut être vue comme un élément neutre pour l'opération $\circ$.

2 Image directe, image réciproque

Définition (Image directe)**.** *Soit $f : E \to F$ et A une partie de E.*
On appelle ***image directe de*** **A** ***par*** **f***, et on note $f(A)$ le sous-ensemble de F défini par :*

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$



Il s'agit là d'une définition par paramétrage. Si on veut maintenant définir $f(A)$ par une propriété caractéristique, il s'agit des éléments de F qui admettent un antécédent dans A :

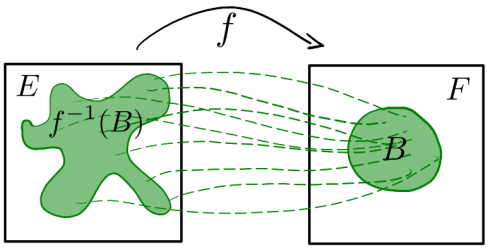
$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A \ tq \ y = f(x)\}$$

Ex : déterminer graphiquement l'image directe de $A = [-1, 2]$ par l'application $f_1 : t \mapsto t^2 + 1$.

Définition (Image réciproque)**.** *Soit $f : E \to F$ et B une partie de F.*
On appelle ***image réciproque de*** **B** ***par*** **f***, et on note $f^{-1}(B)$ le sous-ensemble de E défini par :*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \quad tq \quad f(x) \in B\}$$

Il s'agit donc des éléments de l'ensemble de départ dont l'image appartient à B.



Ex : déterminer graphiquement l'image réciproque de $B = [2, 3]$ par l'application $f_1 : t \mapsto t^2 + 1$.

3 Applications injectives, surjectives, bijectives

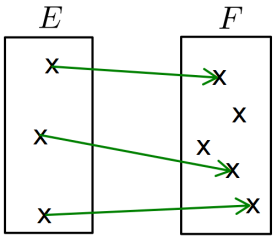
Définition (Application injective)**.** *Soit $f : E \to F$.*
*On dit que f est **injective** (ou que f est une injection) lorsque deux éléments différents de E ne peuvent pas avoir la même image, c'est-à-dire lorsque la phrase suivante est vérifiée :*

$$\forall a, b \in E : \quad a \neq b \Longrightarrow f(a) \neq f(b)$$

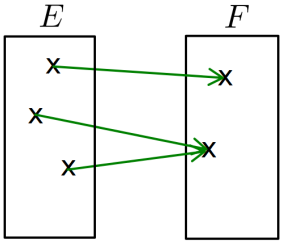
ou de façon équivalente (en prenant la contraposée de l'implication) :

$$\boxed{\forall a, b \in E : \quad f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b}$$

Autrement dit, une injection est une fonction qui ne prend jamais deux fois la même valeur.
***Autre façon de voir les choses :** f est injective si tout élément de F admet **au plus** un antécédent.*



f injective



f non injective

Exemples :

- l'application $f_2 : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & [1,+\infty[\\ t & \longmapsto & t^2+1 \end{pmatrix}$ **n'est pas** injective.
  En effet, par exemple, on a $f_2(1) = 2 = f_2(-1)$, alors que $1 \neq -1$.
- l'application $f_3 : \begin{pmatrix} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [1,+\infty[\\ t & \longmapsto & t^2+1 \end{pmatrix}$ **est** injective.
  Montrons-le en revenant à la définition. Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$. Supposons que $f_3(a) = f_3(b)$. On a alors :

$$\begin{array}{lll} a^2+1 = b^2+1 & \text{donc} & a^2 = b^2 \\ & \text{donc} & a = b \ \text{ ou } \ a = -b \\ & \text{donc} & a = b \qquad (\text{car } a \text{ et } b \text{ sont positifs}) \end{array}$$

  L'injectivité de f_3 est bien démontrée.
- l'exponentielle réelle $\exp : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & e^t \end{pmatrix}$ **est** injective.
  On le montre directement : soit $a, b \in \mathbb{R}$. Si l'on suppose que $e^a = e^b$, alors en appliquant la fonction ln à l'égalité, on obtient $a = b$.

  De façon générale, si une application admet une application réciproque, alors elle est injective.
- l'exponentielle complexe $\begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{it} \end{pmatrix}$ **n'est pas** injective.
  Par exemple, $e^{i0} = 1 = e^{i.2\pi}$, alors que $0 \neq 2\pi$.

  De façon générale, une application périodique n'est jamais injective.

Rq : dans le cas des fonctions à valeurs réelles (et définies sur une partie de $\mathbb{R}$), toute fonction strictement monotone est injective.

Théorème. *La composée de deux applications injectives est injective.*

♥ dem : Considérons trois ensembles E, F, G et deux fonctions $f : E \to F$ et $g : F \to G$:

$$E \underset{f}{\longrightarrow} F \underset{g}{\longrightarrow} G$$

Supposons que f et g sont injectives. On a donc l'injectivité de f :

$$\forall x, y \in E\,, \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y \qquad (*)$$

et celle de g :

$$\forall X, Y \in F\,, \quad g(X) = g(Y) \Rightarrow X = Y \qquad (**)$$

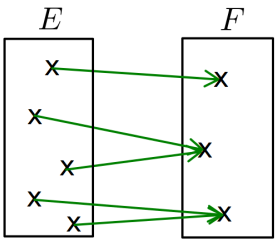
Montrons que $\mathbf{g \circ f}$ est injective. Il s'agit d'une fonction de E dans G.
Fixons $a, b \in E$, et supposons que $g \circ f(a) = g \circ f(b)$. (Objectif : mq cela implique que $a = b$)
On a donc :

$$\begin{array}{lll} & g\big(f(a)\big) = g\big(f(b)\big) & \text{(définition de } g \circ f) \\ \text{donc :} & f(a) = f(b) & \text{(par } (**) \text{ appliquée à } X = f(a) \text{ et } Y = f(b)) \\ \text{donc :} & a = b & \text{(par } (*) \text{ appliquée à } x = a \text{ et } y = b) \end{array}$$

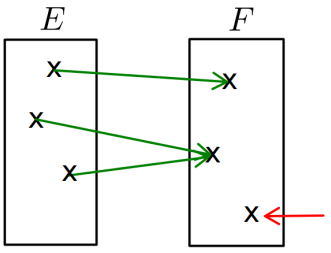
L'injectivité de $g \circ f$ est bien démontrée.

Définition (Application surjective)**.** *Soit $f : E \to F$.*
On dit que f est surjective (ou que f est une surjection) lorsque tous les éléments de l'ensemble d'arrivée F admettent au moins un antécédent. Autrement dit, f est surjective lorsque la propriété suivante est vérifiée :

$$\boxed{\forall y \in F\,,\ \exists x \in E \ tq\ y = f(x)}$$



f surjective



f non surjective

Exemples :

- l'application $f_1 : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^2+1 \end{pmatrix}$ n'est pas surjective. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t^2+1 \geqslant 1$, donc par exemple, 0 n'a pas d'antécédent. En fait, tous les nombres < 1 n'ont pas d'antécédent.
- l'application $f_2 : \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & [1,+\infty[\\ t & \longmapsto & t^2+1 \end{pmatrix}$ est surjective.
  Pour le montrer, fixons un $y \in [1,+\infty[$, et cherchons ses antécédents. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff x^2 + 1 = y \\ &\iff x^2 = y - 1 \end{aligned}$$

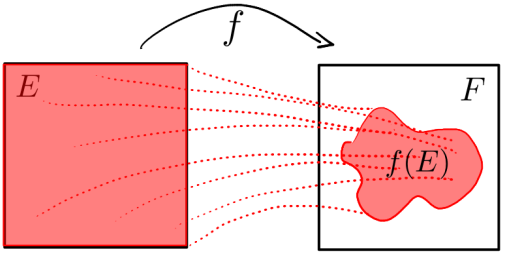
  Or, $y \geqslant 1$, donc $y - 1 \geqslant 0$. D'où l'équivalence :

$$f(x) = y \iff x = \sqrt{y-1} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{y-1}$$

  Ce travail montre que y admet au moins un antécédent (en fait, exactement deux antécédents si $y > 1$, et un seul si $y = 1$).

Remarque. *L'image directe de E par f vaut :*

$$f(E) = \{y \in F \mid \exists x \in E \ tq\ y = f(x)\}$$



Cet ensemble $f(E)$ est donc précisément constitué des éléments de l'ensemble d'arrivée qui admettent un antécédent. Toute fonction $f : E \to F$ peut donc être rendue surjective en restreignant son ensemble d'arrivée à $f(E)$.
Et de façon générale, pour une fonction $f : E \to F$ on a l'équivalence suivante :

$$f \text{ surjective} \iff f(E) = F \qquad \text{(à méditer)}$$

Théorème. *La composée de deux applications surjectives est surjective.*

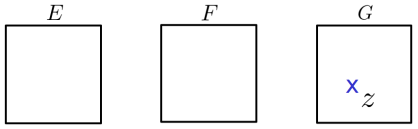
♥ dem : Considérons trois ensembles E, F, G et deux fonctions $f : E \to F$ et $g : F \to G$:

$$E \underset{f}{\longrightarrow} F \underset{g}{\longrightarrow} G$$

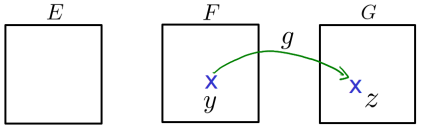
Supposons que f et g sont surjectives. Montrons que $g \circ f$ est elle-même surjective.

Commentaire du professeur : $g \circ f$ est une fonction de E dans G, donc il s'agit de montrer que tout élément $z \in G$ admet un antécédent dans E par $g \circ f$, c-à-d qu'il existe $x \in E$ tq $g(f(x)) = z$.

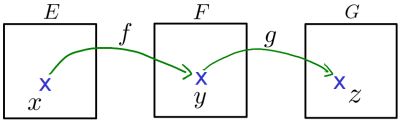
Fixons $z \in G$.



Par surjectivité de g, il existe $y \in F$ tq $g(y) = z$.



Or, par surjectivité de f, il existe $x \in E$ tq $f(x) = y$.



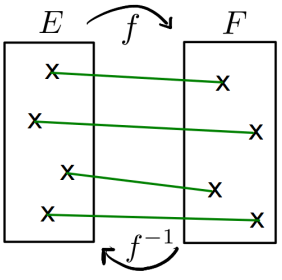
Cet élément $x \in E$ vérifie alors que $g(f(x)) = g(y) = z$. On a donc trouvé un antécédent de z par $g \circ f$.
Conclusion : ce travail étant valable pour tout $z \in G$, on a bien démontré que $g \circ f$ est surjective.

Théorème/définition (Application bijective)**.** *Soit $f : E \to F$.*
Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. *f est injective et surjective ;*
2. *f admet une application réciproque, c'est-à-dire une application $g : F \to E$ telle que*

$$g \circ f = Id_E \qquad \text{et} \qquad f \circ g = Id_F$$

*Dans ce cas, on dit que f est **bijective** (ou est une bijection). La fonction g est unique, et est appelée **la fonction réciproque de** f, notée f^{-1}.*



dem : Commençons par montrer l'équivalence $(1 \Leftrightarrow 2)$ par double implication :

- ▶ Montrons $(1 \Rightarrow 2)$.
  Supposons que f est injective et surjective. On peut alors remarquer que pour tout élément $y \in F$ de l'ensemble d'arrivée, il existe un $x \in \mathbb{E}$ tel que $f(x) = y$ (par surjectivité de f), et de plus cet antécédent x est unique (par injectivité de f). On peut donc définir la fonction suivante :

$$g : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & \text{LE } x \in E \text{ tq } y = f(x) \end{array}$$

  Cette fonction g, par sa définition-même, vérifie $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. La phrase 2 est donc bien démontrée.
- ▶ Montrons $(2 \Rightarrow 1)$.
  Supposons que f admet une fonction réciproque g.
  - Montrons que f est injective. Soit $a, b \in E$. Si $f(a) = f(b)$, alors en appliquant g, on obtient

$$\underbrace{g \circ f}_{\mathrm{Id}_E}(a) = \underbrace{g \circ f}_{\mathrm{Id}_E}(b) \qquad \text{c'est-à-dire :} \qquad a = b$$

    L'injectivité est donc bien démontrée.
  - Montrons que f est surjective. Fixons $y \in F$. Pour lui trouver un antécédent, il suffit de considérer l'élément $g(y)$. En effet, lorsqu'on lui applique f, on obtient :

$$f(g(y)) = \underbrace{f \circ g}_{\mathrm{Id}_F}(y) = y$$

    La surjectivité est donc bien démontrée.

Finalement, l'équivalence $(1 \Leftrightarrow 2)$ est bien démontrée.

Montrons maintenant que la fonction réciproque g est unique. Pour cela, supposons qu'il en existe deux : g et $\tilde{g}$, et montrons qu'on a alors $g = \tilde{g}$. Par définition, g et $\tilde{g}$ vérifient :

$$g \circ f = \tilde{g} \circ f = \mathrm{Id}_E \qquad \text{et} \qquad f \circ g = f \circ \tilde{g} = \mathrm{Id}_F$$

Partons par exemple de $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. En composant à gauche par $\tilde{g}$, on obtient :

$$\underbrace{\tilde{g} \circ f}_{\mathrm{Id}_E} \circ g = \tilde{g} \circ \mathrm{Id}_F \quad \text{donc :} \quad \mathrm{Id}_E \circ g = \tilde{g}$$

$$\text{donc :} \quad g = \tilde{g}$$

L'unicité est bien démontrée.

Théorème. *Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications bijectives. Alors leur composée $g \circ f$ est également bijective, et on a la formule suivante sur sa réciproque :*

$$\big(g \circ f\big)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

dem : comme f et g sont bijectives, on peut considérer leurs réciproques respectives f^{-1} et g^{-1}. On vérifie alors que :

$$\big(g \circ f\big) \circ \big(f^{-1} \circ g^{-1}\big) = g \circ \underbrace{f \circ f^{-1}}_{\mathrm{Id}_F} \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_G$$

et

$$\big(f^{-1} \circ g^{-1}\big) \circ \big(g \circ f\big) = f^{-1} \circ \underbrace{g^{-1} \circ g}_{\mathrm{Id}_F} \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$$

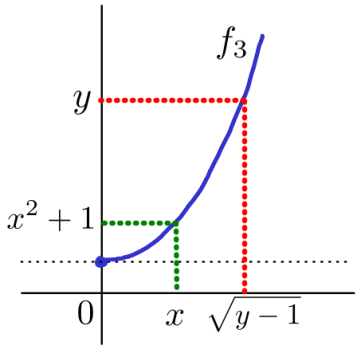
Ces deux égalités montrent à la fois que l'application $g \circ f$ admet une application réciproque (et donc qu'elle est bijective, par théorème), et que cette réciproque est $f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exemple : l'application $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [1,+\infty[\\ t & \longmapsto & t^2+1 \end{array}$ est bijective. En effet, si l'on fixe $y \in [1,+\infty[$ et que l'on cherche ses antécédents, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f_3(x) = y &\iff x^2+1 = y \\ &\iff x^2 = y-1 \\ &\iff x = \sqrt{y-1} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{y-1} \qquad (y \geqslant 1 \text{ donc } y-1 \geqslant 0) \\ &\iff \boxed{x = \sqrt{y-1}} \qquad (\text{car } x \geqslant 0) \end{aligned}$$

Ces équivalences montrent que y admet un unique antécédent. Ce raisonnement étant vrai pour tout $y \in [1,+\infty[$, on a montré que f_3 est bijective. De plus, ce travail donne une expression explicite de sa réciproque f_3^{-1} :

$$f_3^{-1} : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ y & \longmapsto & \sqrt{y-1} \end{array}$$



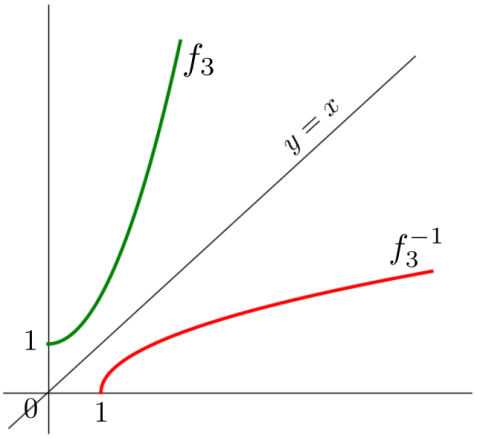
On peut d'ailleurs vérifier que $f_3^{-1} \circ f_3 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$, en calculant pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f_3^{-1}\big(f_3(x)\big) = f_3^{-1}(x^2+1) = \sqrt{(x^2+1)-1} = \sqrt{x^2} = x \qquad \underline{\text{ok}}$$

et que $f_3 \circ f_3^{-1} = \mathrm{Id}_{[1,+\infty[}$, en calculant pour tout $y \in [1,+\infty[$:

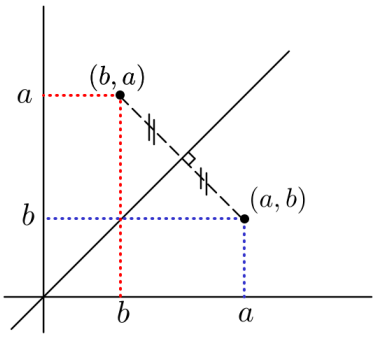
$$f_3\big(f_3^{-1}(y)\big) = f_3(\sqrt{y-1}) = (\sqrt{y-1})^2+1 = y-1+1 = y \qquad \underline{\text{ok}}$$

Remarque. *Pour une fonction réelle f, si l'on représente les graphes de f et f^{-1}, ils sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.*



Cela s'explique par le fait que la symétrie par rapport à l'axe d'équation $y = x$ est la fonction :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & \mapsto & (b,a) \end{array}$$



Or, si un point du plan (a, b) appartient au graphe de f, alors $b = f(a)$, et donc $a = f^{-1}(b)$. Donc le point symétrique (b, a) s'écrit $(b, f^{-1}(b))$, ce qui signifie qu'il appartient au graphe de f^{-1}. Réciproquement, et pour la même raison, si un point (a, b) appartient au graphe de f^{-1}, son symétrique (b, a) appartient à celui de f.